№194 Арутюнов

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования построить её график. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

1. Область определения: $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Найдем значение функции в граничных точках:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty$$

2. Функция непериодическая.
3. Четность\нечетность:

$$y(-x)=\frac{x^2}{-x-1}\neq-y(x)\neq y(x)$$

Следовательно, функция общего вида.

4.

Асимптота параллельная оси Oy: $x=1$.

Найдем асимптоты не параллельные оси Oy.

Пусть уравнение асимптоты

$y=kx+b$

Тогда

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1$$

Таким образом, при $x\to\pm\infty$ уравнение асимптоты $y=x+1$.

5. Точки пересечения с осью Ox.

$y=0$

$$\frac{x^2}{x-1}=0$$
$$x=0$$

Следовательно точка пересечения с осью Ox: $(0;0)$.

6. Точки пересечения с осью Оу.

$$y(0)=0$$

7. Найдем промежутки монотонности, точки минимума, максимума.

$$y'=\frac{2x*(x-1)-x^2*1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$
$$y'=0$$
$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$$
$$x^2-2x=0$$
$$x=0 \qquad x=2$$

Точки экстремума:

$x=0 \qquad y(0)=0$

$x=2 \qquad y(2)=4$

$y'(-1)=\frac{3}{4}>0 \qquad \Rightarrow$ при x < 0 $\qquad y'>0$

$y'(0,5)=\frac{-0,75}{0,25}<0 \qquad \Rightarrow$ при $0<x<1 \qquad y'<0$

$y'(1,5)=\frac{-0,75}{-0,25}<0 \qquad \Rightarrow$ при $1<x<2 \qquad y'<0$

$y'(3)=\frac{3}{4}>0 \qquad \Rightarrow$ при x > 2 $\qquad y'>0$

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y	возрастает	0 , точка максимума	убывает	точка разрыва	убывает	4, точка минимума	возрастает

8. Найдем промежутки выпуклости, вогнутости.

$$y''=\frac{(2x-2)*(x-1)^2-(x^2-2x)*2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

Т. к. $y''\neq 0$, то точек перегиба нет.

$y''(0) = \frac{2}{-1} < 0$ $\Rightarrow$ при $x < 1$ график функции выпуклый

$y''(2) = \frac{2}{1} > 0$ $\Rightarrow$ при $x > 1$ график функции вогнутый

9. Построение графика

x	-5	-1	0	0,5	1,5	2	5
y	$\approx -4,2$	$-0,5$	0	$-0,5$	$4,5$	4	$6,25$