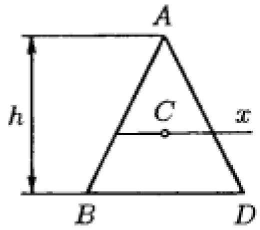

Рис. 34.12.1

Задача 34.12 (34.13). Вычислить момент инерции тонкой однородной пластинки массы M, имеющей форму равнобедренного треугольника с высотой h, относительно оси, проходящей через ее центр масс C параллельно основанию (рис. 34.12.1).

Ответ: $\frac{1}{18}Mh^2$.

➡ **Решение.** Расчетная схема — на рис. 34.12.2. $AB = AD$, точка C — центр масс треугольника. Из планиметрии известно, что $AC = (2/3)h$.

Пусть сторона $BD = a$. Выделим бесконечно тонкую полоску, параллельную оси x. Полоска находится на расстоянии $|y|$ от оси x. Ширина полоски dy. Используя подобие треугольников CAK и C_1AK_1 и тот факт, что

$$CK = \frac{2}{3}ED = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2},$$

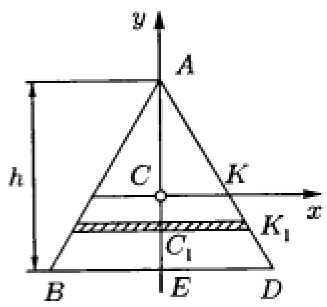

Рис. 34.12.2

получим, что длина выделенной полоски равна

$$2\cdot\frac{a}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{y}{h}\right) = a\left(\frac{2}{3}-\frac{y}{h}\right).$$

Площадь полоски равна

$$ds = a\left(\frac{2}{3}-\frac{y}{h}\right)dy.$$

Масса полоски равна

$$dm = \gamma\cdot ds = \frac{M}{\frac{1}{2}ha}a\left(\frac{2}{3}-\frac{y}{h}\right)dy = \frac{2M}{h^2}\left(\frac{2}{3}h-y\right)dy.$$

Момент инерции полоски относительно оси x равен

$$dJ_x = y^2\,dm = \frac{2M}{h^2}\left(\frac{2}{3}h-y\right)y^2\,dy.$$

Момент инерции всей пластинки относительно оси x равен

$$J_x = \int\limits_{(M)} dJ_x = \int\limits_0^{h/3}\frac{2M}{h^2}\left(\frac{2}{3}h+y\right)y^2\,dy + \int\limits_0^{(2/3)h}\frac{2M}{h^2}\left(\frac{2}{3}h-y\right)y^2\,dy =$$

$$= \frac{2M}{h^2}\left[\int\limits_0^{h/3}\left(\frac{2}{3}h+y\right)y^2\,dy + \int\limits_0^{(2/3)h}\left(\frac{2}{3}h-y\right)y^2\,dy\right] =$$

$$= \frac{2M}{h^2}\left(\frac{2}{9}hy^3\Big|_0^{h/3} + \frac{1}{4}y^4\Big|_0^{h/3} + \frac{2}{9}hy^3\Big|_0^{(2/3)h} - \frac{1}{4}\cdot y^4\Big|_0^{(2/3)h}\right) =$$

$$= \frac{2M}{h^2}h^4\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2^3}{3^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2^4}{3^4}\right) =$$

$$= 2Mh^4\cdot\frac{1}{3^4}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{4}\cdot 2^4\right) = \frac{1}{18}Mh^2.$$